



应用随机过程

张波 商豪 邓军

中国人民大学 统计学院

1/33



GoBack

FullScreen

Close

Quit



第9章 随机过程在金融中的应用

- § 9.1 金融市场的术语与基本假定
- § 9.2 Black-Scholes模型

2/33



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§9.1 金融市场的术语与基本假定

本节我们给出金融市场的一些术语与基本假定。

9.1.1 无套利原则：

金融市场有一个最基本的假设，即市场不允许没有初始投资的无风险利润。若违背了这个市场原则，则可以得到套利机会。所谓套利，即指在开始时无资本，经过资本的市场运作后，变成有非负的随机资金，而且有正资金的概率为正。

3/33



GoBack

FullScreen

Close

Quit



4/33

套利机会在实际操作中很少存在，违背无套利原则的情况一般是短暂且难以把握的，因为在出现套利机会时,大量的投机者就会涌向市场进行套利,他们追逐套利利润的积极性将有效地消除套利机会。经过一个相对较短的混乱时期后,市场就会重返正常,即回复到无套利状态。在金融衍生证券的定价理论中,并不讨论这段混乱时期,

因此,在研究中普遍地排除套利,即假定正常运行的市场没有套利机会,这样的市场也称为可行市场。



GoBack

FullScreen

Close

Quit



9.1.2看涨期权：

看涨期权是指一种不附带义务的未来购买的权利。在时刻0时买方与卖方有一个合约,按此合约规定买方有一个权利,能在时刻T（到期日）以价格K（执行价）从卖方买进股票。如果时刻T时股票的市场价格 S_T 低于执行价格K,买方可以拒绝支付执行价；而如果时刻T时股票的市场价格 S_T 高于执行价格K,买方就一定会选择支付执行价同时获得高价格的股票,称之为期权被执行了。综合起来,买方在时刻T净得随机收益（现金流）为

$$(S_T - K)^+ = \max\{0, S_T - K\}$$

因为买方希望 S_T 尽量大,以便有更多的获利,也就是有选择权的买方盼望股票上涨,这种合约称为看涨期权。



GoBack

FullScreen

Close

Quit



6/33



GoBack

FullScreen

Close

Quit

前面讨论的这种期权中，买方只有在到期时才能执行期权，这种看涨期权称为欧式看涨期权。若解除执行期权的时间限制，允许买方在到期日前的任何时间行使期权，则称为美式看涨期权。

由于这个合约能给买方带来随机收益,就需要买方在 $t=0$ 时刻用钱从卖方购买。这个合约在 $t=0$ 时刻的价格,称为它的贴水或保证金。如何确定这个合约在时刻 $t;T$ 的价格(包括贴水)即是我们要重点讨论的问题。欧式期权由于有执行时间的限制，未来的现金流收入较之美式期权要低些，但是欧式期权现金流收入有明确的表达式，所以估计这种期权的价格会更容易些。



9.1.3看跌期权：

看跌期权是指一种不附带义务的未来出售的权利。在时刻0时买方与卖方有一个合约,按此合约规定买方有一个权利,能在时刻T以价格K（执行价）卖给合约卖方一股股票或者等量的一股股票的市场价格。如果时刻T时股票的市场价格 S_T 高于执行价格K, 买方可以拒绝执行期权; 而如果时刻T时股票的市场价格 S_T 低于执行价格K, 买方就一定会选择执行期权而获利。综合起来, 买方在时刻T净得随机收益（现金流）为

$$(K - S_T)^+ = \max\{0, K - S_T\}$$

因为买方希望 S_T 尽量小, 以便有更多的获利, 也就是有选择权的买方盼望股票下跌, 这种合约称为看跌期权。



GoBack

FullScreen

Close

Quit



如果买方只能在最终时刻 T 行使期权,则称为欧式看跌期权;若买方能在任意时刻 T 行使期权,则称为美式看跌期权。同样由于这个合约能给买方带来随机收益,就需要买方在 $t=0$ 时刻用钱从卖方购买。这个合约在 $t=0$ 时刻的价格,称为它的贴水或保证金。比看涨期权与看跌期权更为一般的欧式期权是:甲方卖给乙方一个由证券组合组成的合约,此合约能在时刻 T 给乙方带来随机收益 $f(S_T)$ 称为欧式未定权益。



GoBack

FullScreen

Close

Quit



9.1.4 无套利原则下的看涨与看跌平权关系

未定权益为 S_T 的欧式权益，称为在时刻 T 到期的远期合约，远期合约在任意时刻 $t(< T)$ 的价格为证券的即时价格 S_t 。 欧式看涨看涨-看跌期权的平权关系：假设看涨期权、看跌期权、远期合约在任意时刻 $t(< T)$ 的价格分别为 C_t, P_t, F_t ，在无套利原则下，有

$$C_t - P_t = F_t - Ke^{-rt}$$

其中， K 表示执行价格， r 表示银行利率。

有了这个平权关系，欧式看涨期权与看跌期权中只要知道一个的价格，就可以得到另一个的价格。

§9.2 Black-Scholes模型

期权的价格是是期权合约中唯一随市场不断变化而改变的量，它受到期权合约中的期限，执行价格，标的资产的价格，无风险利率等众多因素的影响，期权价格的高低直接影响到购买者和出售者的盈亏状况，如何对期权进行定价是期权交易的核心问题。对期权进行定价的过程中，首当其冲的关键性问题就是如何构建合适的模型来描述标的资产的价格变化过程？

法国数学家Bachelier是研究期权定价问题的先驱人物，在其博士论文《The Theory of Speculation》中首次利用随机游走的思想给出了股票价格运行的随机模型。1942 年日本数学家伊藤清对布朗运动引进随机积分，开





11/33

创了随机微分方程理论，是一个重要的里程碑式的工作.而在1965年著名经济学家Samuelson将提出的随机分析学作为工具引入到金融学中，他对Bachelier的股票模型进行了修正，首次提出了用几何布朗运动来描述股票价格过程，这种思想得到了广泛而长期的应用。几何布朗运动模型克服了Bachelier的模型中可能使得股票价格出现负值的这种与现实问题不符合的情况，基于这个模型，Samuelson研究了看涨期权的定价问题。

Samuelson所得出的定价公式有一个遗憾的地方，就是依赖于投资者的个人风险偏好，这就限制了一些问题。Black和Scholes在1973年找到了弥补这一遗憾的新方法，他们建立期权定价模型的关键突破点在于，构造一个由标的股票和无风险债券的适当组合（投资组合），直观意义即



GoBack

FullScreen

Close

Quit



12/33

是不要把鸡蛋放在同一个篮子里面。这个投资组合具有如下特点：投资组合的损益特征与期权在到期日的损益特征是相同的，不管标的股票的价格在未来的时间里怎样变化，两种资产构成的投资组合产生无风险的回报。根据无套利原理（即零投资只能得到零回报），他们用动态复制的方法推导出了欧式期权（看跌或看涨）的定价公式，并且是精确的显式解，他们考虑的情况是基于无红利支付的情况。Black-Scholes的开创性工作即在于在他们的模型中，所有的投资者的投资回报率都是同一个无风险利率，而不依赖于投资者的个人风险偏好。Black-Scholes 定价模型具有划时代的意义，自从它问世以来，有关欧式期权，美式期权，障碍期权，股票期权、股指期货、利率期权、外汇期权等各式各样的期权定价问题得到了广泛而深入的讨论。

||◀ ▶||

◀ ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



Black-Scholes期权定价模型给出了如下假设：

- (1) 市场不存在无风险套利机会。
- (2) 期权是欧式的，即只能在到期日执行期权。
- (3) 市场无摩擦，即不存在税收和交易成本，所有证券完全可分割；
- (4) 无风险利率已知，无风险利率和波动率在合约期限内均为常数，投资者可以用无风险利率自由借贷。
- (5) 股票不分发股利也不作其他任何形式的利润分配。
- (6) 对卖空无任何限制。
- (7) 交易时间及价格变动是连续的。



9.2.1 期权定价问题的描述

以下考虑欧式看涨期权，我们给出Black-Sholes期权定价公式。

①设某种风险资产（如股票）在 t 时刻的价格为 S_t ,并设它满足如下模型:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad t \in [0, T] \quad (9.2.1)$$

其中常数 μ 表示风险资产的平均回报率, $\sigma (\geq 0)$ 表示风险资产的波动率, (B_t) 表示标准Brown运动（在概率测度 P 下）， T 表示期权的到期日。

方程（9.2.1）的解是几何Brown运动:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right\} \quad (9.2.2)$$



②给出一个无风险资产，由如下微分方程来刻画：

$$d\beta_t = r\beta_t dt, \quad t \in [0, T] \quad (9.2.3)$$

假定当前的银行利率为常数 r ，而且不随时间变化（实际情况中，银行利率会随时间发生变化，此处作简化处理）。

③用 a_t 表示 t 时刻投资于风险资产的资金数量， b_t 表示 t 时刻投资于无风险资产的资金数量， (a_t, b_t) 称为一个投资组合。在 t 时刻，由数量为 a_t 的风险资产和数量为 b_t 的无风险资产构成的投资组合的财富值为

$$V_t = a_t S_t + b_t \beta_t, \quad t \in [0, T] \quad (9.2.4)$$



④假定投资组合是自融资的，即财富的增量仅由 S_t 和 β_t 的变动引起，即

$$dV_t = a_t dS_t + b_t d\beta_t \quad (9.2.5)$$

现在我们寻找一个自融资的策略 (a_t, b_t) 和一个相应的财富过程 V_t ，使得

$$V_t = a_t S_t + b_t \beta_t = u(T - t, S_t), \quad t \in [0, T]$$

其中 $u(t, x)$ 为待求的光滑函数。

因为在到期日 T 时刻，投资组合的值 V_T 应为 T 时刻的现金流 $(S_T - K)^+$ ，故可得到一个终端条件。

$$V_T = U(0, S_T) = (S_T - K)^+ \quad (9.2.6)$$



令 $f(t, x) = u(T - t, x)$, 则 $V_t = f(t, S_t)$, 已知 S_t 满足如下积分方程

$$S_t = S_0 + \mu \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dB_s$$

由Itô公式可得:

$$\begin{aligned} V_t - V_0 &= f(t, S_t) - f(0, S_0) \\ &= \int_0^t \left[\frac{\partial f(s, S_s)}{\partial t} - \mu S_s \frac{\partial f(s, S_s)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_s^2 \frac{\partial^2 f(s, S_s)}{\partial x^2} \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma S_s \frac{\partial f(s, S_s)}{\partial x} dB_s \\ &= \int_0^t \left[-\frac{\partial u(T-s, S_s)}{\partial t} + \mu S_s \frac{\partial u(T-s, S_s)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_s^2 \frac{\partial^2 u(T-s, S_s)}{\partial x^2} \right] ds \\ &\quad + \int_0^t \sigma S_s \frac{\partial u(T-s, S_s)}{\partial x} dB_s \end{aligned}$$

17/33



◀ (9.2.7) ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



另一方面, (a_t, b_t) 是自融资的, 故

$$V_t - V_0 = \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s d\beta_s$$

由 $d\beta = r\beta_t dt$ 以及 $V_t = a_t S_t + b_t \beta_t$ 可知

$$b_t = \frac{V_t - a_t S_t}{\beta_t}$$

$$\begin{aligned} V_t - V_0 &= \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t \frac{V_s - a_s S_s}{\beta_s} r \beta_s ds \\ &= \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t r(V_s - a_s S_s) ds \\ &= \int_0^t [(\mu - r)a_s S_s + rV_s] dS \\ &\quad + \int_0^t \sigma a_s S_s dB_s \end{aligned} \tag{9.2.8}$$

比较(9.2.7)与式子(9.2.8)得

$$a_t = \frac{\partial u(T-t, S_t)}{\partial x} \quad (9.2.9)$$

即得到如下偏微分方程:

$$-\frac{\partial u(T-t, S_t)}{\partial t} + rS_t \frac{\partial u(T-t, S_t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u(T-t, S_t)}{\partial x^2} - ru(T-t, S_t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

即得到 $u(t, x)$ 满足的偏微分方程为

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + rx \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - ru(t, x) = 0$$
$$x > 0, \quad t \in [0, T] \quad (9.2.10)$$

由 $V_T = u(0, S_T) = (S_T - K)^+$ 可得

$$u(0, x) = (x - K)^+, \quad x > 0 \quad (9.2.11)$$





9.2.2 Black-Scholes公式

一般来说，求解一个偏微分方程的显示解是比较困难的事情，故很多时候都只能寻求数值解。Black和Scholes基于无红利支付的情况，根据无套利原理，用动态复制的方法推导出了欧式期权（看跌或看涨）的定价公式，并且是精确的显式解。

偏微分方程（9.2.10）的解为：

$$u(t, x) = x\Phi(d_1(t, x)) - Ke^{-rt}\Phi(d_2(t, x))$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准布朗运动的分布函数，

$$d_1(t, x) = \frac{\ln(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



即有

$$V_0 = u(T, S_0) = S_0 \Phi(d_1(T, S_0)) - Ke^{-rT} \Phi(d_2(T, S_0)) \quad (9.2.12)$$

其中

$$d_1(T, S_0) = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1(T, S_0) - \sigma\sqrt{T}$$

随机过程 $V_1 = u(T - t, S_t)$ 表示的是自融资的投资组合在时刻 $t \in [0, T]$ 的价值，自融资投资策略 (a_t, b_t) 为

$$a_t = \frac{\partial u(T - t, S_t)}{\partial x}, \quad b_t = \frac{u(T - t, S_t) - a_t S_t}{\beta_t} \quad (9.2.13)$$

我们称式 (9.2.13) 为Black-Scholes期权定价公式，可知期权价格与平均回报率 μ 是无关的，但与波动率 σ 有关。



如何理解在无套利原则下，期权的初始价格为 $q = u(T, S_0)$?

假设初始期权价格 $q \neq p$. 若 $p > q$, 可采用如下投资策略: 在时刻 $t = 0$, 以价格 p 将期权卖出, 同时根据公式 (9.2.13) 所提供的投资策略投资 q . 故可得到一个初始纯利润 $p - q > 0$. 在到期如 T 时刻, 投资组合的价值为 $a_T S_T + b_T \beta_T = (S_T - K)^+$, 并且有义务支付 $(S_T - K)^+$ 给期权的购买者。这意味着, 若 $S_T > K$, 必须以价格 S_T 购买股票, 而以执行价格 K 将股票卖给期权的买方, 故净损失为 $S_T - K$; 若 $S_T \leq K$, 期权不会被执行, 故净利润为 $p - q$, 这就导致了套利机会的存在。若 $p < q$, 会导致类似情形的发生。

故在无套利原则下，期权的初始价格一定为 $q = u(T, S_0)$.



GoBack

FullScreen

Close

Quit



9.2.3 Black-Scholes公式的推导

Harrison和Kreos在1979年提出了一种鞅定价方法来解决期权的定价问题。为Black-Scholes公式的推导作准备，我们首先介绍等价概率测度与重要的Girsanov定理。

定义 9.2.1 令 P 和 Q 是定义在 σ 代数 $\mathcal{F}$ 上的两个概率测度，若存在一个非负函数 f_1 ，使得

$$Q(A) = \int_A f_1(w) dP(w), \quad A \in \mathcal{F}$$

则称 f_1 为概率测度 Q 关于概率测度 P 的密度，且称概率测度 Q 关于概率测度 P 绝对连续，记为 $Q \ll P$ 。

定义 9.2.2 若 P 关于 Q 绝对连续，且 Q 关于 P 绝对连续，即 $Q \ll P$ 与 $P \ll Q$ 同时成立，则称 P 和 Q 是等价的概率测度。



一般地, 我们用 $B = (B_t, t \in [0, T])$ 表示在概率测度 P 下的Brown运动。若考虑如下形式的过程

$$B_t = B_t + qt, \quad t \in [0, T]$$

其中 q 为某个常数。当 $q \neq 0$ 时, B_t 不是标准Brown运动。如果将概率测度 P 转换成一个新的合适的概率测度 Q 使得 B_t 在新的概率测度 Q 下是一个标准Brown运动, 这即是Girsanov定理解决的问题。一般地, 令

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t), \quad t \in [0, T]$$

表示由Brown运动生成的自然 σ 代数流。



定理 9.2.1 令 $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ 为一个Itô过程

$$dY_t = \rho_t dt + \theta_t dB_t$$

其中 $B_t \in \mathbb{R}^m$, $\rho_t \in \mathbb{R}^n$, $\theta_t \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 假设存在过程 u_t 和 α_t , 使得 $\theta_t u_t = \rho_t - \alpha_t$, 令

$$M_t = \exp \left\{ - \int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds \right\}, \quad dQ(w) = M_T(w) dP(w)$$

其中 M_t 是关于概率测度 P 的鞅, 则 Q 也是概率测度;

过程 $\tilde{B}_t = \int_0^t u_s ds + B_t$, $t \leq T$ 是关于概率测度 Q 的一个标准Brown运动;

且过程 Y_t 满足如下方程: $dY_t = \alpha_t dt + \theta_t d\tilde{B}_t$

测度变换的目的是消去随机微分方程中的漂移项。



例 9.2.1 假设 $Y(t) = (Y_1(t), Y_2(t))^T \in \mathbb{R}^2$, 且有

$$dY_1(t) = 2dt + dB_1(t) + dB_2(t)$$

$$dY_2(t) = 4dt + dB_1(t) - dB_2(t)$$

$$dY(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} dB(t); \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}$$

选择 $\alpha_t = 0$, 则有 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

有唯一解 $u_1 = 3, u_2 = -1$ 。故令 $dQ(w) = \exp\{-3B_1(T) +$

$$B_2(T) - 5T\} dP(w), \quad d\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} dt + dB(t),$$

在概率测度 Q 下, $B(t)$ 是一个标准 Brown 运动,

$$\text{且 } dY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} d\tilde{B}(t)$$



以下运用Girsanov定理来推导Black-Scholes公式：

股票的贴现价格为 $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, $t \in [0, T]$ 。在新的概率测度 Q 下， $\tilde{S}_t$ 是一个鞅。令 $f(t, x) = e^{-rt}x$ ，由Itô公式有

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\tilde{B}_t, \quad \tilde{B}_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t, \quad t \in [0, T]$$

由Girsanov定理知，存在一个等价鞅测度 Q ，使得 $\tilde{B}_t$ 在此测度下是一个标准Brown运动，上式解为：

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \tilde{B}_t \right\}$$

在概率测度 Q 下为一个鞅。



定理 9.2.2 假设在Black-Scholes模型中, 存在一个自融资策略 (a_t, b_t) 使得投资组合在 t 时刻的价值为

$$V_t = a_t S_t + b_t \beta_t, \quad t \in [0, T]$$

且此投资组合在到期日 T 时刻的价值等于未定权益在 T 时刻的价值, 即

$$V_T = h(S_T)$$

则有投资组合在到期日 t 时刻的价值为

$$V_t = E_Q \left[e^{-r(T-t)} h(S_T) | \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T]$$

其中 $E_Q(A | \mathcal{F}_t)$ 表示在新的概率测度 Q 下随机变量 A 关于 $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ 的条件期望。



证明：考虑贴现的财富过程：

$$\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t = e^{-rt} (a_t S_t + b_t \beta_t)$$

由Itô公式有 $d\tilde{V}_t = -r\tilde{V}_t dt + e^{-rt} dV_t$ 且有

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= -re^{-rt}(a_t S_t + b_t \beta_t)dt + e^{-rt}(a_t dS_t + b_t d\beta_t) \\ &= a_t(-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) \\ &= a_t d\tilde{S}_t \end{aligned}$$

29/33



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$\tilde{V}_0 = V_0$, 故有 $\tilde{V}_0 = V_0 + \int_0^t a_s d\tilde{S}_s = V_0 + \sigma \int_0^t a_s \tilde{S}_s d\tilde{B}_s$
在等价鞅测度 Q 下, $\tilde{B}$ 为标准 Brown 运动, $\{a_t \tilde{S}_t, t \in [0, T]\}$ 适应的。故 $\{\tilde{V}_t\}$ 为关于 $(\mathcal{F}_t)$ 的鞅。且由鞅的性质有

$$\tilde{V}_t = E_Q[\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t] \quad t \in [0, T]$$

但 $\tilde{V}_T = e^{-rT} V_T = e^{-rT} h(S_T)$, 故

$$e^{-rt} V_t = E_Q[e^{-rT} h(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

即 $V_t = E_Q[e^{-r(T-t)} h(S_T) | \mathcal{F}_t]$, 定理得证。



由定理9.2.2, 我们计算欧式看涨期权的定价公式:
令 $\theta = T - t$, $t \in [0, T]$, 故投资组合在时刻 t 的价值为:

$$\begin{aligned} V_t &= E_Q[e^{-r\theta h(S_T)} | \mathcal{F}_t] \\ &= E_Q[e^{-r\theta h(S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\theta + \sigma(\tilde{B}_T - \tilde{B}_t)})} | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

在时刻 t , S_t 是 B_t 的函数, 故有 $\sigma(S_t) \subset \mathcal{F}_t$; 另外, 在概率测度 Q 下, $\tilde{B}_T - \tilde{B}_t$ 关于 $\mathcal{F}_t$ 独立并且具有正态分布。由条件期望的性质有: $V_t = f(t, S_t)$, 其中

$$f(t, x) = e^{-r\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} h[xe^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\theta + \sigma y\theta^{\frac{1}{2}}}] \varphi(y) dy$$

$\varphi(y)$ 表示标准正态分布的密度函数。



对于欧式看涨期权来说,

$$h(x) = (x - K)^+ = \max\{0, x - K\}$$

故

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \int_{-z_2}^{+\infty} (xe^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta + \sigma y\theta^{\frac{1}{2}}} - Ke^{-r\theta})\varphi(y)dy \\ &= x\Phi(z_1) - Ke^{-r\theta}\Phi(z_2) \end{aligned}$$

其中 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数, 且

$$z_1 = \frac{\ln \frac{x}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}, \quad z_2 = z_1 - \sigma\sqrt{\theta}$$

对于欧式看跌期权, $h(x) = (K - x)^+$, 采用类似的方式得出:

$$f(t, x) = Ke^{-r\theta}\Phi(-z_2) - x\Phi(-z_1)$$



33/33



GoBack

FullScreen

Close

Quit

本节介绍的是经典的Black-Scholes公式。在对股票价格波动率的实际研究中，价波动率呈现出一些统计特征：如波动率微笑，肥尾分布，群聚效应，均值回复，杠杆作用等。针对这些现象，许多学者对Black-Scholes模型中标的资产服从几何Brown运动、波动率为常数等假设作了改进。对标的资产的分布的修正中，提出用跳扩散过程等来描述股价过程。对波动率为常数的修正中，根据波动率函数的特点分为两大类：确定性波动率模型和随机波动率模型。